Übungen zur Vorlesung *Algorithmen 2* — Dipl.-Inf. Henning Wunderlich
Wintersemester 2006–07 — Abt. Theoretische Informatik

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1
Eine Paarung heiße Männer-optimal, falls jeder Mann seine optimale Partnerin, d.h. die bestmögliche Wahl in einer stabilen Paarung, bekommt.
Frage: Ist eine Männer-optimale Paarung immer stabil?

Sei $G := (U \cup V, E)$, $U := \{u_1, \ldots, u_n\}$, $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein bipartiter Graph, in dem jeder Kante (u_i, v_j) ein Gewicht $w_{i,j}$ zugeordnet wurde. Definiere eine Matrix B durch

$$B[i][j] \;\; := \;\; \begin{cases} 0 & (u_i, v_j) \notin E \\ 2^{w_{i,j}} & (u_i, v_j) \in E \end{cases}$$

Bezeichne mit $B_{i,j}$ die Untermatrix von B, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Aufgabe 2
Beweisen Sie: Unter der Annahme, daß G eine eindeutig bestimmte Paarung M minimalen Gewichts w besitzt, gilt $\det B \neq 0$ und 2^w ist die höchste Zweierpotenz, die $\det B$ teilt.

Aufgabe 3
Beweisen Sie: G besitze eine eindeutig bestimmte Paarung M minimalen Gewichts w. Dann ist $\frac{(\det B_{i,j}) \cdot 2^{w_{i,j}}}{2^w}$ ungerade.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Identität

$$(\det B_{i,j}) \cdot 2^{w_{i,j}} = \sum_{\sigma : \sigma(i) = j} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{perm}(\sigma)$$